

$$2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)(Lu, du/dt)dt \leq 2e^{c_{10}T} \|Lu\|_F \|u\|_E, \quad \text{где} \quad c_{10} = c_6 +$$

$$+ \max \{c_2, 2(c_4 + c_5)\}.$$
 В результате деления этих оценок на $\|u\|_E$ получаем энергетическое неравенство (10) для гладких решений $u \in D(L)$ и затем предельным переходом распространяем его на все сильные решения $u \in D(\bar{L})$ задачи Коши (1) – (2).

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

На основании теоремы существования сильных решений для главной части уравнения в силу неравенств (4), (5), (8), (9) из [3] и ограниченности младшей части в силу неравенств (7) стандартным методом продолжения по параметру легко доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия A1 – A3 и B1 – B3, то для любых $f \in F$ существует сильное решение $u \in E$ задачи Коши (1) – (2).*

Литература

1. Н. И. Гаврилова, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17, № 5. С.789–791.
2. С. П. Ходос // Сборник работ 63-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2006. С. 58—61.
3. С. П. Ходос // Сборник работ 64-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2007. С. 202—206.
4. Ф. Е Ломовцев. // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873 – 886.

РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ-ЛЭМБА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СРЕЗОВ ТРИГОНАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

А. А. Царева

Одной из фундаментальных проблем акустической физики и акустоэлектроники является исследование закономерностей распространения упругих волн в пьезоэлектрических пластинах. На их основе возможна разработка высокочувствительных биологических и химических датчиков, устройств обработки сигналов, характеризующихся широкой полосой пропускания. Настоящая работа посвящена исследованию волновых движений в пьезоэлектрических пластинах тригональной системы симметрии различным образом ориентированных относительно осей основ-

ной кристаллографической системы координат с применением функциональных возможностей систем компьютерной математики.

Определяющие уравнения движения для различных плоскостей симметрии без учета электромагнитных эффектов в квазистатическом приближении представим в следующем виде [1]:

$$\sum_{j,k,l=1}^3 \left(c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\sum_{j,k,l=1}^3 \left(e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) = 0,$$
(1)

где $c_{ijkl} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{ls} c_{pqrs}^{(0)}$; $e_{kij} = \alpha_{kp} \alpha_{iq} \alpha_{jr} e_{pqr}^{(0)}$; $\varepsilon_{jk} = \alpha_{jp} \alpha_{kq} \varepsilon_{pq}^{(0)}$; $c_{pqrs}^{(0)}$, $e_{pqr}^{(0)}$ и $\varepsilon_{pq}^{(0)}$ - основные модули упругости, пьезоэлектрические модули и диэлектрические проницаемости тригонально анизотропной среды соответственно; α_{ip} - компоненты матрицы преобразования координат; u_i - компоненты вектора перемещений; Φ - электрический потенциал, ρ - плотность материала.

Рассмотрим, плоскую гармоническую волну, распространяющуюся в пластинке толщины $2h$, срединной плоскостью которой является координатная плоскость $x_1 0 x_2$ [2]. Соответствующие решения системы (1) представим в виде:

$$u_i = w_i(x_3) \exp(I(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\Phi = w_4(x_3) \exp(I(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)),$$
(2)

где $w_k(x_3)$ - неизвестные функции, $k = \overline{1, 4}$, k_1, k_2 - компоненты волнового вектора, ω - круговая частота, I - мнимая единица. После подстановки выражений (2) в систему (1) получим следующую систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} w_j(x_3) = 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$
(3)

Здесь коэффициенты a_{ij} определяются следующим образом:

$$a_{11} = \rho \omega^2 - c_{11} k_1^2 - 2c_{16} k_1 k_2 - c_{66} k_2^2 + 2I(k_1 c_{15} + k_2 c_{56}) \partial_3 + c_{55} \partial_3^2,$$

$$a_{22} = \rho \omega^2 - c_{66} k_1^2 - 2k_1 k_2 c_{26} - c_{22} k_2^2 + 2I(k_2 c_{24} + k_1 c_{46}) \partial_3 + c_{44} \partial_3^2,$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= \rho \omega^2 2 - c_{55} k_1^2 - 2k_1 k_2 c_{45} - k_2^2 c_{44} + 2I(k_1 c_{35} + k_2 c_{34}) \partial_3 + c_{33} \partial_3^2, \\
a_{44} &= \varepsilon_{11} (k_1^2 + k_2^2) - \varepsilon_{33} \partial_3^2, \\
a_{12} &= a_{21} = I(k_1(c_{14} + c_{56}) + k_2(c_{25} + c_{46})) \partial_3 + \\
&\quad + c_{45} \partial_3^2 - k_1^2 c_{16} - k_1 k_2 (c_{12} + c_{66}) - k_2^2 c_{26}, \\
a_{13} &= a_{31} = I(k_1(c_{13} + c_{55}) + k_2(c_{45} + c_{36})) \partial_3 + \\
&\quad + c_{35} \partial_3^2 - k_1^2 c_{15} - k_1 k_2 (c_{14} + c_{56}) - k_2^2 c_{46}, \\
a_{14} &= a_{41} = I(k_1(e_{15} + e_{31}) + k_2(e_{25} + e_{36})) \partial_3 + \\
&\quad + e_{35} \partial_3^2 - k_1^2 e_{11} - k_1 k_2 (e_{16} + e_{21}) - k_2^2 e_{26}, \\
a_{23} &= a_{32} = I(k_2(c_{23} + c_{44}) + k_1(c_{45} + c_{36})) \partial_3 + \\
&\quad + c_{34} \partial_3^2 - k_1^2 c_{56} - k_1 k_2 (c_{25} + c_{46}) - k_2^2 c_{24}, \\
a_{24} &= a_{42} = I(k_1(e_{14} + e_{36}) + k_2(e_{24} + e_{32})) \partial_3 + \\
&\quad + e_{34} \partial_3^2 - k_1^2 e_{16} - k_1 k_2 (e_{12} + e_{26}) - k_2^2 e_{22}, \\
a_{34} &= a_{43} = I(k_1(e_{13} + e_{35}) + k_2(e_{23} + e_{34})) \partial_3 + \\
&\quad + e_{33} \partial_3^2 - k_1^2 e_{15} - k_2^2 e_{25} - k_1 k_2 (e_{14} + e_{25}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Неизвестную функцию $w_1(x_3)$ найдем из дифференциального уравнения:

$$b_0 w_1(x_3) + \sum_{k=1}^8 b_k \frac{\partial^k w_1(x_3)}{\partial x_3^k} = 0, \tag{5}$$

где b_0, b_j - коэффициенты, зависящие от констант упругости, пьезоэлектрических модулей, диэлектрических проницаемостей и компонент волнового вектора. Решение уравнения получим в следующем виде:

$$w_1(x_3) = \sum_{k=1}^8 C_k e^{\lambda_k x_3}. \tag{6}$$

Здесь λ_k - корни характеристического уравнения однородного дифференциального уравнения (5), C_k - неизвестные константы интегрирования.

С помощью соотношения (3) найдем выражения для оставшихся неизвестных функций $w_2(x_3)$, $w_3(x_3)$ и $w_4(x_3)$ из следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Pw_2(x_3) &= \left(a_{13}(a_{14}a_{23} + a_{12}a_{34}) - a_{13}^2a_{24} - a_{12}a_{14}a_{33} + a_{11}(a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34}) \right) w_1(x_3), \\ Pw_3(x_3) &= \left(a_{12}a_{14}a_{23} + a_{13}(a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}) - a_{12}^2a_{34} + a_{11}(a_{22}a_{34} - a_{23}a_{24}) \right) w_1(x_3), \\ Pw_4(x_3) &= \left(a_{13}^2a_{22} - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{12}^2a_{33} + a_{11}(a_{23}^2 - a_{22}a_{33}) \right) w_1(x_3), \\ P &= a_{14}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + a_{13}(a_{23}a_{24} - a_{22}a_{34}) + a_{12}(a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33}) \end{aligned} \quad (7)$$

Неизвестные константы интегрирования найдем из условий равенства нулю механических напряжений T_{33} , T_{13} и T_{23} на плоскостях $x_3 = \pm h$, а также из условия непрерывности электрического потенциала Φ и нормальной компоненты электрической индукции D_3 .

Условие равенства нулю механических напряжений на свободной поверхности $x_3 = 0$ кристалла записывается в виде [1]:

$$T_{i3} = \sum_{k,l=1}^3 c_{i3kl} \partial_k u_l + \sum_{k=1}^3 e_{ki3} \partial_k \Phi = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (8)$$

Из электрических граничных условий следует непрерывность электрического потенциала Φ и нормальной компоненты электрической индукции

$$D_3 = \sum_{k,l=1}^3 (e_{3kl} \partial_k u_l - \varepsilon_{3kl} \partial_k \Phi). \quad (9)$$

Отсюда с учетом решений ((2),(6)) получим дисперсионное уравнение для нахождения скоростей распространения волн Лэмба. Численное решение дисперсионного уравнения проведено для ниобата лития, получены зависимости скоростей распространения волн Лэмба от угла наклона нормали к волновому фронту для различных ориентаций пластин, выполнена генерация дифференциальных уравнений динамического равновесия, компонент тензора напряжений и электрической индукции для различных срезов тригонально анизотропных пластинок.

Для упрощения вычислений и преобразований были введены безразмерные:

перемещения (вдоль осей Ox_1, Ox_2, Ox_3) и пьезоэлектрические модули:

$$U_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{h}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$K_{ijk} = \frac{e_{ijk}}{\sqrt{c_{2323}\varepsilon_{11}}}, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 3},$$
(10)

потенциал, модули упругости, плотность:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{\varepsilon_{11}}\Phi(x_1, x_2, x_3)}{h}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$A_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{2323}}, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 3}, l = \overline{1, 3},$$

$$\rho_0 = \rho \frac{c_2^2}{c_{2323}}$$
(11)

диэлектрические проницаемости:

$$s_{22} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad s_{33} = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}.$$
(12)

где h – это толщина пластинки, а c_2 – это величина, имеющая размерность скорости.

Литература

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах/ Э. Дьелесан, Д. Руайе – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах/ И.А. Викторов – М.:Наука, 1981. – 287 с.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.С.Циунчик

Нелинейные уравнения Шредингера широко используются для описания нелинейных волновых процессов различной физической природы [1,2]. В большинстве практически значимых случаев аналитическое решение подобных задач найти не удастся, и их исчерпывающий анализ требует применения приближенных численных методов.

Для исследования эффективности численных алгоритмов традиционно используется модельная задача для уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ):